

① نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $(2, b+1) \in f^{-1}$ و $(b, a) \in f^{-1}$ باشد، مقدار $a+b$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۳

② اگر تابع $f = \{(1, 2), (3, 0), (a^2 - 8, 2), (b^2 - 1, 0)\}$ یک به یک باشد، حاصل $|a| + |b|$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۵

③ با توجه به گزینه‌ها، به ازای کدام مقدار a و b تابع $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} + b & , x > 0 \\ x^2 + a & , x \leq 0 \end{cases}$ تابعی یک به یک است؟

- (۱) $a = -1$ و $b = 1$
(۲) $a = 1$ و $b = 1$
(۳) $a = -1$ و $b = 0$
(۴) $a = -2$ و $b = 2$

④ اگر $f(x) = ax + 4$ و $f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + b$ باشد، آنگاه مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{9}{4}$
(۳) $-\frac{3}{4}$
(۴) $-\frac{17}{3}$

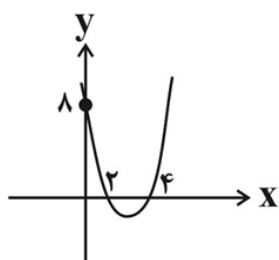
⑤ اگر در تابع خطی f ، $f(2) = -6$ و $f(1) = -1$ باشد، مقدار $f^{-1}(-11)$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۲
(۳) ۳
(۴) ۱

⑥ اگر تابع $f = \{(a, -\log_F(1-a)), (3, 2a), (a, 1 + \log_F a), (4a, 4a-1)\}$ یک به یک باشد، چند مقدار برای a به دست می‌آید؟

- (۱) هیچ
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

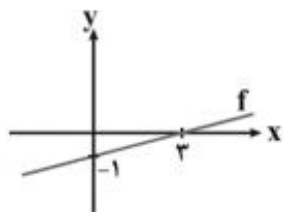
⑦ اگر وارون تابع $g(x) = ax + b$ نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول‌های ۵ و ۲ قطع کند، آنگاه جواب معادله $g^{-1}(x) = g(x)$ کدام است؟



(۱) جواب ندارد.

- (۲) ۲
(۳) -۲
(۴) صفر

۸) شکل زیر نمودار تابع f را نشان می‌دهد. عرض از مبدأ تابع $y = 2f^{-1}(x+1) + 4$ کدام است؟



(۱) ۱۶

(۲) ۷

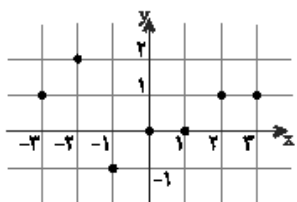
(۳) ۳

(۴) ۴

۹) اگر تابع خطی f از نقاط $(4, 2)$ و $(-2, 0)$ عبور کند، ضابطه تابع وارون آن کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = 2x - 1$ (۲) $f^{-1}(x) = -3x + 2$ (۳) $f^{-1}(x) = 3x - 2$ (۴) $f^{-1}(x) = 4x - 1$

۱۰) با حذف حداقل چند نقطه در نمودار زیر، یک تابع یک به یک به دست می‌آید؟



(۱) سه نقطه

(۲) چهار نقطه

(۳) دو نقطه

(۴) پنج نقطه

۱۱) اگر برای تابع $f(x) = 2x + a - 1$ داشته باشیم $f(a) = f^{-1}(a)$ ، مقدار a کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

۱۲) کدام تابع، یک به یک است؟

(۲) $y = (x-1)|x-1|$

(۱) $y = x + |x-1|$

(۴) $y = \frac{x|x-1|}{x-1}$

(۳) $y = \frac{x-1}{|x-1|}$

۱۳) اگر $f^{-1}(x) = 3x + 1$ ، آن گاه تابع با ضابطه $y = 2f(x+1) - 1$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) صفر

(۳) -۱

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$

۱۴) اگر f تابعی یک به یک باشد و نمودار تابع f فقط از نواحی اول و چهارم عبور کند، نمودار تابع f^{-1} از کدام نواحی عبور می‌کند؟

(۲) دوم و سوم

(۱) اول و دوم

(۴) دوم و چهارم

(۳) اول و سوم

۱۵) تابع وارون تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ با دامنه $x \geq 2$ ، کدام است؟

(۲) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 9, x \leq 3$

(۱) $f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 11, x \leq 3$

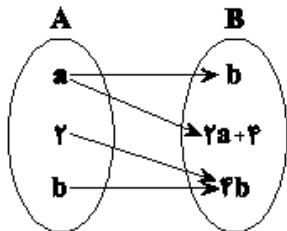
(۴) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 7, x \leq 1$

(۳) $f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 11, x \leq 1$

۱۶) تابع $f(x) = -|x-1| + 1, x \geq 2$ مفروض است. دامنه f^{-1} شامل چند عدد صحیح غیرمنفی است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی شمار

۱۷) اگر نمودار پیکانی زیر نمایانگر یک تابع وارون پذیر باشد، آن گاه زوج مرتب (a, b) برابر با کدام گزینه است؟

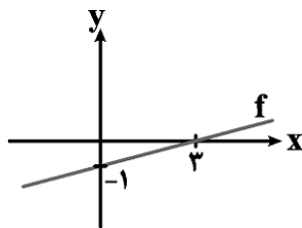


- ۱ (۱, ۲) ۲ (۲, -۱) ۳ (۲, ۸) ۴ (-۱, -۴)

۱۸) در کدام تابع زیر، وارون تابع خود یک تابع نیست؟

- ۱ {۱, ۴}, {۲, ۵}, {-۱, ۳} ۲ {۲, ۰}, {۱, ۱}, {۳, ۰} ۳ {۱, ۵}, {-۱, ۲}, {۰, ۰} ۴ {-۱, ۱}, {۰, ۰}, {۱, -۱}

۱۹) شکل روبه رو نمودار تابع f را نشان می دهد. عرض از مبدأ تابع $y = 2f^{-1}(x+1) + 4$ کدام است؟



- ۱ ۱۶ ۲ ۷ ۳ ۳ ۴ ۴

۲۰) اگر $(5) f^{-1} = 3f(x) - x - 2$ باشد، مقدار $f(-\frac{3}{2})$ کدام است؟

- ۱ $\frac{14}{3}$ ۲ $\frac{7}{3}$ ۳ $-\frac{5}{3}$ ۴ -۲

۲۱) نمودار تابع $y = 4 - (x-4)^3$ نمودار وارونش را در چند نقطه قطع می کند؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ صفر

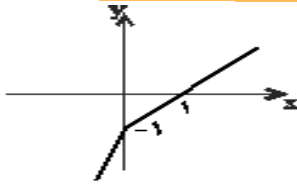
۲۲) اگر $f(x) = 2x + \sqrt{x+2}$ باشد، نمودار تابع $g(x) = -f^{-1}(x+1)$ نیمساز ربع دوم را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

- ۱ $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ ۲ $\frac{2-\sqrt{7}}{2}$ ۳ $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ ۴ $\frac{-2-\sqrt{7}}{2}$

۲۳) اگر $f = \{(a+1, 2), (0, 2), (-2, 1), (2a, b-1)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ -۲ ۴ -۱

۴۴) نمودار وارون تابع مقابل از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟



- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

۴۵) نمودار تابع $f(x) = x|2x| - 4x$ در فاصله $[-a, a]$ یک‌به‌یک است. بیش‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

۴۶) اگر $f = \{(3, 5), (4, 2), (5, -1)\}$ و $g = \{(5, 2), (2, 7), (3, 1)\}$ باشند، آنگاه تابع $2g + f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(2, 9), (5, 6)\}$ (۲) $\{(2, 11), (5, 9)\}$
(۳) $\{(2, 18), (5, 6), (3, 7)\}$ (۴) $\{(2, 18), (5, 7)\}$

۴۷) نمودار خط $y = \frac{1}{4}x + 1$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده و ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. خط حاصل، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۶ (۴) صفر

۴۸) اگر وارون تابع $f(x) = \frac{ax+1}{3}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{2x+b}{a+1}$ باشد، b کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۹) اگر در تابع خطی $y = f(x)$ ، $f(2) = 3$ و $f^{-1}(0) = 5$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(6)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر
(۳) -۱ (۴) ۳

ساده

درصد پاسخگویی ۳۹٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

$$(2, b+1) \in f^{-1} \Rightarrow (b+1, 2) \in f$$

با دقت در نمودار تابع f می‌بینیم که نقطه $(1, 2)$ بر روی نمودار تابع f قرار دارد یعنی $(1, 2) \in f$ ، بنابراین:

$$(b+1, 2) = (1, 2) \Rightarrow b+1=1 \Rightarrow b=0$$

همچنین داریم:

$$(b, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, b) \in f \xrightarrow{b=0} (a, 0) \in f$$

با توجه به نمودار تابع f می‌بینیم که نقطه $(-1, 0)$ نیز متعلق به تابع f می‌باشد، بنابراین:

$$(-1, 0) = (a, 0) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a + b = -1 + 0 = -1$$

سوال ۲

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۵۶%

ساده

گزینه «۴»

تابع f یک به یک است. بنابراین در زوج مرتب‌های با مؤلفه دوم برابر، باید مؤلفه‌های اول نیز برابر باشند، پس:

$$b^2 - 1 = 3 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow |b| = 2$$

$$a^2 - 8 = 1 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow |a| + |b| = 3 + 2 = 5$$

سوال ۳

گزینه درست: ۲

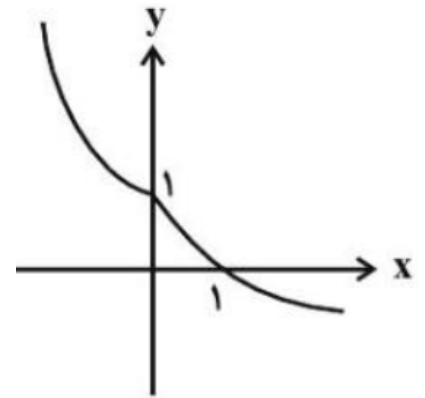
قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۹%

ساده

گزینه «۲»

به ازای $a = b = 1$ نمودار تابع به صورت زیر است:



هر خط افقی (موازی محور x ‌ها) نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع f به ازای $a = b = 1$ تابعی یک به یک است.

در سایر گزینه‌ها خطی افقی وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

سوال ۴

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۷%

ساده

گزینه «۲»

$$f(x) = ax + \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{عوض کردن جای } x \text{ و } y} x = ay + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow ay = x - \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{4}{3a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{4}{3a} \xrightarrow{\text{مقایسه با } f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + b}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = -\frac{4}{a} \xrightarrow{a = \frac{3}{2}} b = -\frac{4}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{9 - 16}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{7}{6}\right) + \frac{4}{3} = -\frac{7}{4} + \frac{4}{3} = \frac{9}{4}$$

گزینه «۳»

با توجه به اطلاعات داده شده، ضابطه تابع خطی $f(x) = ax + b$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} (2, -6) \in f \\ (1, -1) \in f \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-6 - (-1)}{2 - 1} = \frac{-5}{1} = -5 \\ \Rightarrow f(x) = -5x + b$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1, -1) \in f} -5(1) + b = -1 &\Rightarrow b = 4 \\ \Rightarrow f(x) = -5x + 4 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن مقدار $f^{-1}(-11)$ داریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(-11) = m &\Rightarrow f(m) = -11 \\ \Rightarrow -5m + 4 = -11 &\Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

گزینه «۱»

شرط تابع بودن آن است که اگر $x_1 = x_2$ باشد، باید $y_1 = y_2$ باشد و یا $x_1 \neq x_2$ باشد.

شرط یک به یک بودن آن است که به ازای هر $x_1 \neq x_2$ داشته باشیم $y_1 \neq y_2$.

$$\Rightarrow -\log_F(1-a) = 1 + \log_F a \Rightarrow \log_F a + \log_F(1-a) = -1$$

$$\Rightarrow \log_F(a - a^2) = -1 \Rightarrow a - a^2 = \frac{1}{F} \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{F} = (a - \frac{1}{F})^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{F}$$

به دلیل وجود دو زوج مرتب (۱ و ۲) و (۱ و ۳) حال به ازای $a = \frac{1}{F}$ شرط یک به یک بودن تابع را بررسی می کنیم.

$$a = \frac{1}{F} : f = \left\{ \left(\frac{1}{F}, \log_F^2 \right), (3, 1), \left(\frac{1}{F}, \log_F^3 \right), (2, 1) \right\}$$

به ازای هیچ مقداری از a تابع f یک به یک نخواهد بود.

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۷

گزینه «۱»

ابتدا معادله سهمی را بدست می‌آوریم. $x = ۴$ و $x = ۲$ ریشه‌های تابع درجه دوم هستند:

$$f(x) = a'(x-2)(x-4)$$

$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ} = A} A = a'(0-2)(0-4) \Rightarrow Aa' = A$$

$$\Rightarrow a' = 1 \Rightarrow f(x) = (x-2)(x-4)$$

وارون g ، نمودار سهمی را در نقاط ۲ و ۵ قطع می‌کند، پس:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = (2-2)(2-4) = 0 \Rightarrow (2, 0) \in g^{-1}$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = (5-2)(5-4) = 3 \Rightarrow (5, 3) \in g^{-1}$$

حال معادله خط g^{-1} را می‌یابیم:

$$\frac{3-0}{5-2} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow y-0 = 1(x-2)$$

$$\Rightarrow y = x-2 \Rightarrow g^{-1}(x) = x-2$$

ضابطه $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x = y+2 \Rightarrow g(x) = x+2$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow x-2 = x+2$$

معادله جواب ندارد، چون دو خط موازی‌اند.

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۳٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۸

گزینه «۱»

$$\xrightarrow{(0,-1) \in f} f: y+1 = \frac{1}{3}(x-0)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y+3 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}: y = 3x+3$$

$$y = 2f^{-1}(x+1) + 4 = 2(3(x+1)+3) + 4 = 6x+16$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 16$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۰٪

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۳

سوال ۹

گزینه «۳»

با توجه به تعریف تابع وارون داریم:

$$(4, 2) \in f \Rightarrow (2, 4) \in f^{-1}$$

$$(-2, 0) \in f \Rightarrow (0, -2) \in f^{-1}$$

حال معادله خط گذرنده از دو نقطه $(2, 4)$ و $(0, -2)$ را می‌نویسیم:

$$m = \frac{4 - (-2)}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y - (-2) = 3(x - 0) \Rightarrow y + 2 = 3x \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3x - 2$$

ساده

درصد پاسخگویی ۵۵%

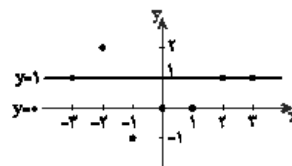
قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۱۰

گزینه «۱»

خط $y = 1$ نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند، پس باید حداقل دو نقطه از این سه نقطه حذف شوند، همچنین خط $y = 0$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس باید حداقل یک نقطه از این دو نقطه حذف شود تا تابع یک‌به‌یک شود. بنابراین در مجموع باید حداقل ۳ نقطه از نمودار حذف شود.



ساده

درصد پاسخگویی ۴۰%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۱

گزینه «۲»

$$f(a) = 2a + a - 1 = 3a - 1$$

$$y = 2x + a - 1 \xrightarrow{\text{جایگزینی } y, x} x = 2y + a - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{x - a + 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(a) = \frac{a - a + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(a) = f^{-1}(a) \Rightarrow 3a - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۲

گزینه «۲»

توابع گزینه «۱» و «۳» به ازای $x < 1$ ، ثابت و غیر یک‌به‌یک هستند.

مقدار تابع گزینه «۴» نیز به ازای دو مقدار ۲ و -۲ برابر است، بنابراین غیر یک‌به‌یک است.

ساده

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۱۳

گزینه «۱»

ابتدا ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = 3x + 1 \Rightarrow y - 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{y - 1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{x - 1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x + 1) = \frac{x + 1 - 1}{3} = \frac{x}{3}$$

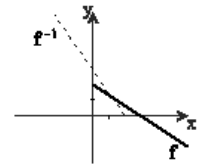
$$y = 2f(x + 1) - 1 \Rightarrow y = 2 \times \left(\frac{x}{3}\right) - 1$$

برای به دست آوردن محل تلاقی نمودار با محور x ها داریم:

$$\xrightarrow{y=0} \frac{2x}{3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

راه حل اول: نمودار تابع f را به صورت شکل زیر در نظر بگیرید که از نواحی اول و چهارم محورهای مختصات عبور می‌کند.

قرینه آن را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. همانطور که مشاهده می‌شود نمودار f^{-1} از نواحی اول و دوم می‌گذرد.



راه حل دوم: در ناحیه اول، طول و عرض نقاط مثبت و در ناحیه چهارم، طول نقاط مثبت و عرض نقاط منفی است. وارون تابع با جابه‌جا کردن طول و عرض نقاط به دست می‌آید؛ بنابراین وارون نقاطی که در ناحیه اول قرار دارند، در همان ناحیه می‌مانند و وارون نقاطی که در ناحیه چهارم قرار دارند، در ناحیه دوم قرار می‌گیرند.

ناحیه اول: $(\beta, \alpha) \xrightarrow{\text{وارون}} (\alpha, \beta)$: ناحیه اول

ناحیه دوم: $(\beta, \alpha) \xrightarrow{\text{وارون}} (\alpha, \beta)$: ناحیه چهارم

$$D_f = [6, +\infty)$$

$$x \geq 6 \Rightarrow x - 2 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x-2} \leq -2 \Rightarrow f(x) = 3 - \sqrt{x-2} \leq 1$$

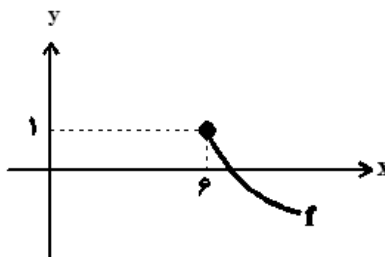
$$\Rightarrow R_f = (-\infty, 1]$$

حال تابع وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = 3 - \sqrt{x-2} \Rightarrow \sqrt{x-2} = 3 - y \Rightarrow x - 2 = (3 - y)^2$$

$$\Rightarrow x = (3 - y)^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 11; D_{f^{-1}} = (-\infty, 1]$$

دامنه f^{-1} همان برد f است.



سوال ۱۶

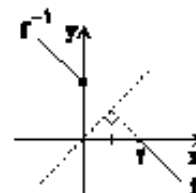
گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۱%

متوسط

نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به $y = x$ است. با استفاده از روش ترسیم داریم:



مشاهده می‌کنیم دامنه f^{-1} بازه $[-\infty, 0]$ است که $x = 0$ تنها عدد صحیح غیرمنفی در دامنه‌اش می‌باشد.

سوال ۱۷

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۱%

ساده

گزینه «۱»

از مولفه a دو پیکان خارج شده است؛ در نتیجه مولفه‌های دوم باید با هم برابر باشند:

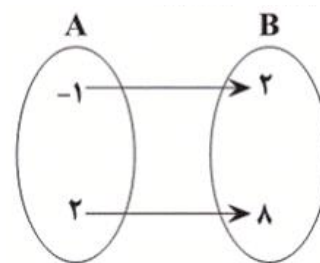
$$2a + 4 = b$$

از طرفی برای وارون‌پذیری، نباید دو پیکان وارد $4b$ شوند، پس مولفه‌های اول یکسان هستند:

$$b = 2$$

در نتیجه داریم: $2a + 4 = b \Rightarrow a = -1 \Rightarrow (a, b) = (-1, 2)$

پس نمودار پیکانی به شکل زیر درمی‌آید:



گزینه «۲»

وارون هر یک از توابع را با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم‌شان یافته و سپس تابع بودن آنها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱):

$$\{(1, 4), (2, 5), (-1, 3)\} \xrightarrow{\text{وارون}} \{(4, 1), (5, 2), (3, -1)\}$$

تابع است. $\Rightarrow$

گزینه (۲):

$$\{(2, 0), (1, 1), (3, 0)\} \xrightarrow{\text{وارون}} \{(0, 2), (1, 1), (0, 3)\}$$

تابع نیست. $\Rightarrow$

دو زوج مرتب متمایز $(0, 2)$ و $(0, 3)$ مؤلفه‌های اولشان برابرند، بنابراین تابع نیست.

گزینه (۳):

$$\{(1, 5), (-1, 2), (0, 0)\} \xrightarrow{\text{وارون}} \{(5, 1), (2, -1), (0, 0)\}$$

تابع است. $\Rightarrow$

گزینه (۴):

$$\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\} \xrightarrow{\text{وارون}} \{(1, -1), (0, 0), (-1, 1)\}$$

تابع است. $\Rightarrow$

گزینه «۱»

$$\text{شیب خط} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(0, -1) \in f} f: y + 1 = \frac{1}{3}(x - 0)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y + 3 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}: y = 3x + 3$$

$$y = 3f^{-1}(x + 1) + 4 = 3(3(x + 1) + 3) + 4 = 9x + 16$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 16$$

گزینه «۲»

از آنجا که نقطه $(5, f^{-1}(5))$ روی نمودار تابع f^{-1} است، نقطه $(f^{-1}(5), 5)$ روی نمودار تابع f خواهد بود، یعنی می توان به جای x مقدار $f^{-1}(5)$ و به جای $f(x)$ عدد ۵ را جایگزین کرد. بنابراین از تساوی صورت سؤال داریم:

$$3f(f^{-1}(5)) - f^{-1}(5) - 2 = f^{-1}(5)$$

$$\Rightarrow 3 \times 5 - 2 = 2f^{-1}(5) \Rightarrow f^{-1}(5) = \frac{13}{2}$$

حال با جای گذاری مقدار بدست آمده برای $f^{-1}(5)$ و $x = -\frac{3}{2}$ در رابطه داده شده، $f(-\frac{3}{2})$ را بدست می آوریم:

$$3f(-\frac{3}{2}) + \frac{3}{2} - 2 = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow 3f(-\frac{3}{2}) = 7 \Rightarrow f(-\frac{3}{2}) = \frac{7}{3}$$

گزینه «۳»

ابتدا ضابطه وارون تابع را به دست می آوریم:

$$y = 4 - (x - 4)^3 \Rightarrow y - 4 = -(x - 4)^3 \Rightarrow x - 4 = -\sqrt[3]{y - 4}$$

$$\Rightarrow x = 4 - \sqrt[3]{y - 4} \Rightarrow y = 4 - \sqrt[3]{x - 4}$$

دو تابع را با هم تلاقی می دهیم:

$$4 - \sqrt[3]{x - 4} = 4 - (x - 4)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x - 4} = (x - 4)^3$$

$$x - 4 = t \Rightarrow \sqrt[3]{t} = t^3 \xrightarrow{\text{توان ۳}} t = t^9$$

$$\Rightarrow t^9 - t = t(t^8 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 4 \\ t = 1 \Rightarrow x = 5 \\ t = -1 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

پس در سه نقطه همدیگر را قطع می کنند.

گزینه «۱»

فرض کنیم نمودار تابع g در نقطه $(a, -a)$ که $a < 0$ است، نیمساز ربع دوم را قطع کند.

پس داریم:

$$g(a) = -f^{-1}(a+1) = -a \Rightarrow f^{-1}(a+1) = a$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} f(a) = a+1 \Rightarrow 2a + \sqrt{a+2} = a+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+2} = 1-a; -2 \leq a < 0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a+2 = a^2 - 2a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 1 = 0 \xrightarrow{-2 \leq a < 0} a = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۱٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۲۳

گزینه «۱»

شرط آن که رابطه‌ای زوج مرتبی تابع یک به یک باشد، آن است که مؤلفه‌های اول متمایز باشند (شرط تابع) و همچنین مؤلفه‌های دوم نیز متمایز باشند. (شرط یک به یکی) بنابراین اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های دوم یکسان داشته باشیم باید مؤلفه‌های اول نیز یکسان باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} (a+1, 2) \in f \\ (0, 2) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط یک به یک بودن}} a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\xrightarrow{a=-1} (2a, b-1) = (-2, b-1)$$

$$\begin{cases} (-2, 1) \in f \\ (-2, b-1) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} b-1=1 \Rightarrow b=2$$

$$\Rightarrow a+b = -1+2 = 1$$

ساده

درصد پاسخگویی ۵۷٪

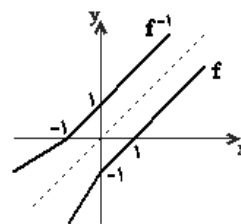
قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۲۴

گزینه «۴»

کافی است گزینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.



دید می‌شود که نمودار f^{-1} از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

ساده

درصد پاسخگویی ۳۹٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

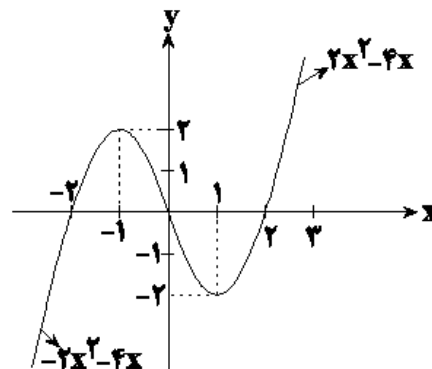
سوال ۲۵

گزینه «۴»

اول نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x|x^2 - 4x| = \begin{cases} x^3 - 4x^2 & x \geq 0 \\ -x^3 + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$$

مطابق شکل نمودار تابع در فاصله $[-1, 1]$ یک‌به‌یک است. پس بیش‌ترین مقدار a برابر ۱ می‌باشد.



ساده

درصد پاسخگویی ۵۴%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۴

سوال ۲۶

گزینه «۴»

ابتدا تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$$f^{-1} = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), (-1, \mathfrak{A})\}$$

سپس تابع $\mathfrak{A}g$ را به دست می آوریم:

$$\mathfrak{A}g = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{A}, \mathfrak{A})\}$$

حال تابع $\mathfrak{A}g + f^{-1}$ را می نویسیم:

$$D_{\mathfrak{A}g + f^{-1}} = D_g \cap D_{f^{-1}} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A}g + f^{-1} = \{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), (\mathfrak{A}, \mathfrak{A})\}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۰%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۲

سوال ۲۷

گزینه ی «۲»

قرینه سازی نسبت به خط $y = x$ یعنی وارون کردن تابع:

$$y = \frac{1}{\mathfrak{A}}x + 1 \xrightarrow{\text{وارون}} x = \frac{1}{\mathfrak{A}}y + 1 \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{\mathfrak{A}}y \Rightarrow y = \mathfrak{A}x - \mathfrak{A}$$

$$y = \mathfrak{A}(x + \mathfrak{A}) - \mathfrak{A} \Rightarrow y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{A}$$

حال برای آن که نمودار را $\mathfrak{A}$ واحد به چپ انتقال دهیم، به جای x آن، $x + \mathfrak{A}$ قرار می دهیم:بنابراین عرض از مبدأ خط حاصل برابر $\mathfrak{A}$ است.

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۱%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۲۸

گزینه «۱»

وارون تابع $f(x) = \frac{ax+1}{\mathfrak{A}}$ را به دست می آوریم:

$$y = \frac{ax+1}{\mathfrak{A}} \Rightarrow \mathfrak{A}y = ax + 1 \Rightarrow \frac{\mathfrak{A}y-1}{a} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\mathfrak{A}x-1}{a} = \frac{\mathfrak{A}}{a}x - \frac{1}{a}$$

بنابراین باید:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a}x - \frac{1}{a} = \frac{\mathfrak{A}x+b}{a+1} = \frac{\mathfrak{A}}{a+1}x + \frac{b}{a+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{\mathfrak{A}}{a+1} \\ -\frac{1}{a} = \frac{b}{a+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{A}a = \mathfrak{A}a + \mathfrak{A} \\ a+1 = -ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\mathfrak{A} \\ -\mathfrak{A} = \mathfrak{A}b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\mathfrak{A}, b = -\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$$

$$f^{-1}(۵) = ۵, f(۲) = ۳ \Rightarrow f^{-1}(۳) = ۲$$

برای به دست آوردن f^{-1} ، تابع خطی گذرنده از نقاط (۵, ۰) و (۲, ۳) را می‌یابیم:

$$f^{-1}: y - ۵ = \frac{۵ - ۲}{۰ - ۳}(x - ۵)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -x + ۵ \xrightarrow{x=۶} f^{-1}(۶) = -۱$$